反応拡散系mA+nB→0の普遍的性質(第5回『非平衡系の統計物理』シンポジウム)

笹本, 智弘; 守, 真太郎; 和達, 三樹

反応拡散系 $mA + nB \to \emptyset$ の普遍的性質

東京大学大学院理学系研究科　笹本 智弘
(共同研究者：東大理　守 真太郎、和達 三樹)

1　はじめに

2種類の粒子 A、B から成る反応拡散系 $mA + nB \to \emptyset$ を考える。この系は、低次元では大きなゆらぎのために平均場理論では予想できないような振舞いを示す事が知られている。例えば最も簡単な $(m,n) = (1,1)$ の場合は4次元が臨界次元であって、粒子の減少の仕方は漸近的に $\sim t^{-1}\,(d > 4), \sim (t/\log t)^{-1}\,(d = 4), \sim t^{-d/4}\,(d < 4)$ のようになる。より一般の (m,n) に対しても低次元での系の振舞いが平均場理論からはずれることは知られているが、その臨界次元や粒子数減少の指数に関しては曖昧な点がある。われわれはこの種の反応拡散系を解析するために最近導入されたくりこみ群を用いた方法を応用し、この反応拡散系の性質を調べる。

2　解析方法と結果

一般に古典多粒子系に対するマスター方程式は、第2量子化の言葉を用いて虚時間のシュレディンガー方程式に書き直す事ができる。この事実を用いると物理量は

$$\langle A(t) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}(a,\bar{a},b,\bar{b}) A(a(t),b(t)) e^{-S}}{\int \mathcal{D}(a,\bar{a},b,\bar{b}) e^{-S}}$$

のように経路積分の形に書く事ができ、この反応拡散系を特徴づける作用 S は、

$$S = \int \mathrm{d}^d x \Bigg[\int_0^t \mathrm{d}t \Bigg\{ \bar{a}\left(\partial_t - \nabla^2\right) a + \bar{b}\left(\partial_t - \nabla^2\right) b \\ - \lambda_0 (1 - (1+\bar{a})^m (1+\bar{b})^n) a^m b^n \Bigg\} - m n_0 \bar{a}(0) - n n_0 \bar{b}(0) \Bigg]$$

で与えられる。

まず作用の中に現れる相互作用項の結合定数が無次元となる条件から、この系の臨界次元は $4/(m+n-1)$ であることがわかる。臨界次元より高い次元では平均場理論が正しい記述を与えるが、臨界次元以下ではゆらぎの効果が大きくなる。その結果、初期条件にあった粒子数のゆらぎが後々まで残り、十分反応が起こった後で系は A 粒子ばかりが存在する部分と B 粒子ばかりが存在する部分に分離する (これを particle segregation という)。この事を考慮に入れて計算を行なうと、粒子数は漸近的に $\sim t^{-d/4}$ のように減少することが示される。この結果は臨界次元以下では (m,n) の値によらず成立し、その意味で普遍的な性質である。われわれはまたこの系に対して数値計算を行なう事によって上の理論的結果を確認した。